

**Metodika převodu mezi ETRF2000 a S-JTSK
varianta 2**

Jan Kostecký
Jakub Kostecký
Ivan Pešek

Úvod

Následující metodika popisuje detailně převod mezi **souřadnicovými systémy ETRF2000 a S-JTSK**. (*Poznámka: Podle doporučení EUREF-TWG se má pro realizaci Evropského referenčního rámce používat označení ETRF2000 místo předchozího ETRF2000(R05)*). Zprostředkující veličinou pro tento převod je systém S-JTSK/05.

Nástup technologie Globálních navigačních družicových systémů (GNSS) v 80. letech 20. století znamenal revoluční skok v rychlosti a do značné míry i v přesnosti určování polohy s „geodetickou přesností“ (jednotky cm). Kromě požadavku integrace geodetických základů do celoevropského souřadnicového systému bylo nutné umožnit propojení prostorového souřadnicového systému, se kterým pracuje technologie GNSS, se systémem rovinných souřadnic v kartografickém zobrazení, se kterým pracují klasické geodetické metody. Realizovaný souřadnicový systém **S-JTSK/05** vyhovuje následujícím požadavkům:

- systém je primárně realizován 3141 body sítě DOPNUL a „Výběrová údržba“
- pro měření technologií GNSS používá prostorový geodetický systém referenční rámec v realizaci roku 2005 – tedy ETRF2000 – tím je zaručena návaznost na Evropský prostorový souřadnicový systém
- pro měření v rovinných souřadnicích používá souřadnicový systém modifikovaného Křovákova zobrazení – tím je zaručena kontinuita se stávajícím závazným souřadnicovým systémem S-JTSK
- pro transformaci elipsoidických výšek (vztažených k elipsoidu GRS80) na výšky nadmořské v závazném systému „Balt po vyrovnání“ je použito modelu kvazigeoidu CR-2005
- mezi souřadnicemi v souřadnicovém rámci ETRF2000 a rovinnými souřadnicemi v modifikovaném Křovákově zobrazení platí exaktní matematický vztah
- střední kvadratická hodnota polohové odchylky mezi souřadnicemi v S-JTSK a S-JTSK/05 je 13.3 cm, pro práce vyžadující menší přesnost než 0.5 m jsou oba systémy záměnné

1. Definice S-JTSK/05

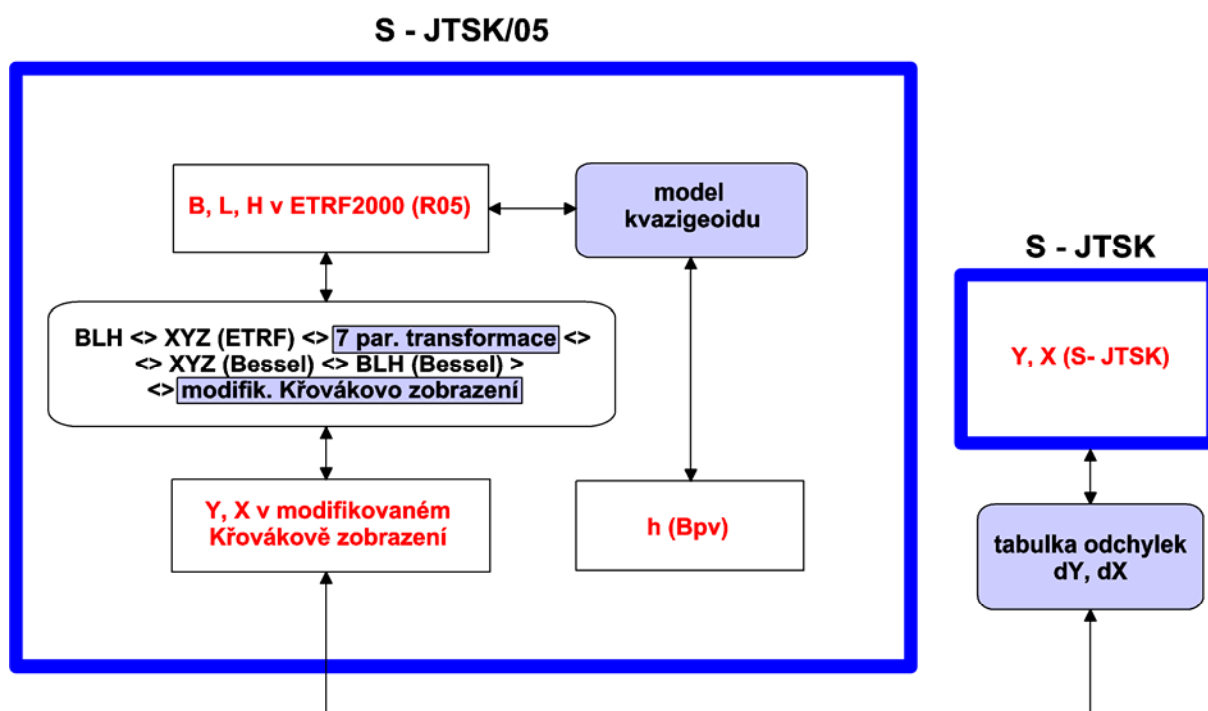
Souřadnicový systém S-JTSK/05 obsahuje:

- elipsoidické souřadnice B , L , H , vztažené k elipsoidu GRS80 v referenčním rámci ETRF2000
- rovinné souřadnice Y , X v modifikovaném Křovákově zobrazení a nadmořské výšky h_{BpV} ve výškovém systému „Balt po vyrovnání“

Mezi oběma typy souřadnic existuje jednoznačný matematický vztah, struktura transformací je patrná z obrázku 1 a bude popsána dále. Systém je využitelný pouze na území České republiky.

Mezi **S-JTSK** a **S-JTSK/05** platí vztah:

$$\begin{aligned} Y_{S-JTSK} &= Y_{S-JTSK/05} - 5\,000\,000 + dY, \\ X_{S-JTSK} &= X_{S-JTSK/05} - 5\,000\,000 + dX. \end{aligned}$$



Obrázek 1 – Schéma transformace v S-JTSK/05

Odchylky dY , dX mezi S-JTSK a S-JTSK/05 jsou počítány ze sítě vybraných trigonometrických a zhušťovacích bodů, které byly zaměřeny Zeměměřickým úřadem a Katastrálními úřady v letech 1994 až 2008 technologií GPS a dále trigonometrických bodů v systému S-JTSK/95, převedených lokální transformací do S-JTSK/05. Odchylky jsou tabelovány v pravidelné síti 2 x 2 km.

Pro převod výšek je použit model kvazigeoidu CR-2005, který byl odvozen navázáním modelu CR-2000 na síť 1024 bodů výběrové údržby, jejichž výška byla určena nivelací.

Transformace (B, L, H_{el}) v ETRF2000 na (Y, X, H_{Bpv}) v S-JTSK:

$$\begin{aligned} (B, L, H_{el})_{ETRF2000} &\Rightarrow [1] \Rightarrow (X, Y, Z)_{ETRF2000} \Rightarrow [2] \Rightarrow (X, Y, Z)_{S-JTSK/05} \Rightarrow [3] \Rightarrow (B, L, H_{el})_{S-JTSK/05} \Rightarrow \\ &\Rightarrow [4] \Rightarrow (Y, X)_{S-JTSK/05} \Rightarrow [5] \Rightarrow (Y, X)_{S-JTSK}; \\ (H_{el}) &\Rightarrow [6] \Rightarrow (H_{Bpv}) \end{aligned}$$

kde:

- [1] značí převod elipsoidických souřadnic na pravoúhlé prostorové souřadnice,
- [2] značí sedmiprvkovou Helmertovu prostorovou transformaci,
- [3] je inverzní k [1],
- [4] značí zobrazovací rovnice modifikovaného Křovákova zobrazení
- [5] přidání korekcí dY, dX (vysvětlení viz níže),
- [6] prosté přičtení výšky kvazigeoidu.

Transformace (Y, X, H_{Bpv}) v S-JTSK na (B, L, H_{el}) v ETRF2000:

$$\begin{aligned}
(Y, X)_{S-JTSK} &\Rightarrow [5'] \Rightarrow (Y, X)_{S-JTSK/05} \Rightarrow [4'] \Rightarrow (B, L, H_{el})_{S-JTSK/05} \Rightarrow [3'] \Rightarrow (X, Y, Z)_{S-JTSK/05} \Rightarrow \\
&\Rightarrow [2'] \Rightarrow (X, Y, Z)_{ETRF2000} \Rightarrow [1'] \Rightarrow (B, L, H_{el})_{ETRF2000}; \\
(H_{Bpv}) &\Rightarrow [6'] \Rightarrow (H_{el}),
\end{aligned}$$

kde čárkované transformace jsou inverzní k nečárkovaným.

1.1 Převod elipsoidických souřadnic na pravoúhlé prostorové souřadnice a naopak

$$\begin{aligned}
X &= [N + H_{el}] \cos B \cos L, \\
Y &= [N + H_{el}] \cos B \sin L, \\
Z &= [N(1 - e^2) + H_{el}] \sin B.
\end{aligned}$$

kde X, Y, Z jsou pravoúhlé prostorové souřadnice, B je geodetická šířka, L je geodetická délka, H_{el} je elipsoidická výška a N je příčný poloměr křivosti

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}},$$

a je velká poloosa referenčního elipsoidu a e je excentricita elipsoidu.

Pro elipsoid GRS80 platí: $a = 6\,378\,137.0$ m, $e^2 = 0.00669\,43800\,22901$,
pro elipsoid Besselův platí: $a = 6\,377\,397.155$ m, $e^2 = 0.00667\,43722\,3062$.

Pro obrácenou transformaci použijeme vzorce

$$\begin{aligned}
L &= \arctan\left(\frac{Y}{X}\right), \\
B_0 &= \arctan\left[\frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \left(1 + \frac{e^2}{1 - e^2}\right)\right]
\end{aligned}$$

a dále iteracemi

$$\begin{aligned}
N_i &= \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_{i-1}}}, \\
H_{el_i} &= \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{\cos B_{i-1}} - N_i \\
B_i &= \arctan\left[\frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \left(1 - \frac{N_i e^2}{N_i + H_{el_i}}\right)^{-1}\right]
\end{aligned}$$

1.2 Prostorová transformace

Transformace [2] mezi soustavou $X1, Y1, Z1$ a soustavou $X2, Y2, Z2$ je dána vztahy:

$$(1) \quad \begin{pmatrix} X2 \\ Y2 \\ Z2 \end{pmatrix} = \left(1 + p4 \times 10^{-6}\right) \begin{pmatrix} 1 & p5 & -p6 \\ -p5 & 1 & p7 \\ p6 & -p7 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X1 \\ Y1 \\ Z1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p1 \\ p2 \\ p3 \end{pmatrix},$$

koeficienty $p1$ až $p7$ jsou:

Transformace ETRF2000 >> S-JTSK/05:

$$p1 = -572.203 \text{ m}$$

$$p2 = -85.328 \text{ m}$$

$$p3 = -461.934 \text{ m}$$

$$p4 = -3.5393$$

$$p5 = 5.24832714''/\rho''$$

$$p6 = 1.52900087''/\rho''$$

$$p7 = 4.97311727''/\rho''$$

kde ρ'' je 206264.806''

Transformace S-JTSK/05 >> ETRF2000:

$$p1 = 572.213 \text{ m}$$

$$p2 = 85.334 \text{ m}$$

$$p3 = 461.940 \text{ m}$$

$$p4 = 3.5378$$

$$p5 = -5.24836073''/\rho''$$

$$p6 = -1.52899176''/\rho''$$

$$p7 = -4.97316164''/\rho''$$

Poznámka: transformační parametry pro zpětnou transformaci S-JTSK/05 do ETRF2000 se mírně liší od parametrů z důvodu relativně velkého pootočení systému S-JTSK vůči ETRF2000 (9'' až 11'').

1.3 Modifikované Křovákovo zobrazení

Modifikované Křovákovo zobrazení je definováno původním Křovákovým zobrazením s malými dodatečnými členy, plynoucími z požadavku minimalizace rozdílu mezi souřadnicemi v S-JTSK/05 a S-JTSK.

Základní vztahy tohoto zobrazení jsou:

a) Konstanty

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= 49^{\circ}30', \quad a = 6377397.155 \text{ m}, \quad e^2 = 0.0066743722 \quad 3062, \\ \alpha &= \sqrt{1 + \frac{e^2 \cos^4 \varphi_0}{1 - e^2}}, \quad U_{\varrho} = 59^{\circ}42'42.69689'', \quad U_0 = \arcsin \frac{\sin \varphi_0}{\alpha}, \\ g(\varphi_0) &= \left(\frac{1 + e \sin \varphi_0}{1 - e \sin \varphi_0} \right)^{\alpha e/2}, \quad k = \tan \left(\frac{U_0}{2} + 45^{\circ} \right) \cdot \cot^{\alpha} \left(\frac{\varphi_0}{2} + 45^{\circ} \right) \cdot g(\varphi_0), \\ k_1 &= 0.9999, \\ N_0 &= \frac{a \sqrt{1 - e^2}}{1 - e^2 \sin^2 \varphi_0}, \quad S_0 = 78^{\circ}30', \quad n = \sin S_0, \quad \rho_0 = k_1 \cdot N_0 \cot S_0\end{aligned}$$

b) Transformace B, L (Bessel) na Y, X rovinné:

$$\begin{aligned}g(B) &= \left(\frac{1 + e \sin B}{1 - e \sin B} \right)^{\alpha e/2}, \\ U &= 2 \left[\arctan \left(k \cdot \tan^{\alpha} \left(\frac{B}{2} + 45^{\circ} \right) \cdot g(B)^{-1} \right) - 45^{\circ} \right], \\ \lambda' &= L + 17^{\circ}40', \\ \Delta V &= \alpha \cdot (42^{\circ}30' - \lambda'), \quad a' = 90^{\circ} - U_{\varrho},\end{aligned}$$

a dále

$$\begin{aligned}S &= \arcsin [\cos a' \sin U + \sin a' \cos U \cos \Delta V], \\ D &= \arcsin \left[\frac{\cos U \sin \Delta V}{\cos S} \right], \quad \varepsilon = n \cdot D, \\ \rho &= \rho_0 \tan^n \left(\frac{S_0}{2} + 45^{\circ} \right) \cdot \cot^n \left(\frac{S}{2} + 45^{\circ} \right), \\ Y' &= \rho \sin \varepsilon, \quad X' = \rho \cos \varepsilon,\end{aligned}$$

výsledné Y, X jsou:

$$Y = (Y' - \Delta Y) + 5000000.0, \quad X = (X' - \Delta X) + 5000000.0,$$

kde $\Delta Y, \Delta X$ budou definovány výrazy (2).

c) Transformace pro Y, X rovinné na B, L (Bessel):

$$Y' = (Y + \Delta Y) - 5000000.0, \quad X' = (X + \Delta X) - 5000000.0,$$

$$\rho = \sqrt{X'^2 + Y'^2}, \quad \varepsilon = \arctan \frac{Y'}{X'}, \quad D = \frac{\varepsilon}{\sin S_0},$$

$$S = 2 \left\{ \arctan \left[\left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{1/n} \cdot \tan \left(\frac{S_0}{2} + 45^\circ \right) \right] - 45^\circ \right\},$$

$$U = \arcsin[\cos a' \sin S - \sin a' \cos S \cos D],$$

$$\Delta V = \arcsin \left[\frac{\cos S \sin D}{\cos U} \right], \quad L = 24^\circ 50' - \frac{\Delta V}{\alpha},$$

B vypočteme iterací:

$$B_i = 2 \left\{ \arctan \left[k^{(-1/\alpha)} \tan^{1/\alpha} \left(\frac{U}{2} + 45^\circ \right) \left(\frac{1 + e \sin B_{i-1}}{1 - e \sin B_{i-1}} \right)^{e/2} \right] - 45^\circ \right\},$$

když $B_0 = U, i = 1, 2, \dots$

d) Dotransformace

Veličiny $\Delta Y, \Delta X$ plynoucí z dotransformace, jsou funkcí Y', X' a vypočteme je podle výrazů:

$$(2) \quad \begin{aligned} \Delta Y &= A_2 + A_3 Y_{red} + A_4 X_{red} + 2A_5 Y_{red} X_{red} + A_6 (X_{red}^2 - Y_{red}^2) + A_8 X_{red} (X_{red}^2 - 3Y_{red}^2) + \\ &+ A_7 Y_{red} (3X_{red}^2 - Y_{red}^2) - 4A_{10} Y_{red} X_{red} (X_{red}^2 - Y_{red}^2) + A_9 (X_{red}^4 + Y_{red}^4 - 6X_{red}^2 Y_{red}^2) \\ \Delta X &= A_1 + A_3 X_{red} - A_4 Y_{red} - 2A_6 Y_{red} X_{red} + A_5 (X_{red}^2 - Y_{red}^2) + A_7 X_{red} (X_{red}^2 - 3Y_{red}^2) - \\ &- A_8 Y_{red} (3X_{red}^2 - Y_{red}^2) + 4A_9 Y_{red} X_{red} (X_{red}^2 - Y_{red}^2) + A_{10} (X_{red}^4 + Y_{red}^4 - 6X_{red}^2 Y_{red}^2) \end{aligned}$$

kde Y_{red}, X_{red} jsou:

$$Y_{red} = Y' - 654000.0 \text{ m}, \quad X_{red} = X' - 1089000.0 \text{ m}$$

a

$$\begin{aligned} A_1 &= 0.2946529277\text{d}-01 \\ A_2 &= 0.2515965696\text{d}-01 \\ A_3 &= 0.1193845912\text{d}-06 \\ A_4 &= -0.4668270147\text{d}-06 \\ A_5 &= 0.9233980362\text{d}-11 \\ A_6 &= 0.1523735715\text{d}-11 \\ A_7 &= 0.1696780024\text{d}-17 \\ A_8 &= 0.4408314235\text{d}-17 \\ A_9 &= -0.8331083518\text{d}-23 \\ A_{10} &= -0.3689471323\text{d}-23 \end{aligned}$$

e) Podstatným příspěvkem pro zpřesnění transformace je však znalost souřadnic cca 46 tisíc trigonometrických a zhušťovacích bodů, jejichž souřadnice v ETRF2000 byly určeny vyrovnáním či transformací na základě výsledků výše zmíněné kampaně „zhušťování“ a jejichž souřadnice v S-JTSK a nadmořské výšky v systému Bpv byly získány z databáze trigonometrických a zhušťovacích bodů DATAZ.

Pro tyto můžeme tak vypočítat

$$dY = Y_{S-JTSK/05} - Y_{S-JTSK}, \quad dX = X_{S-JTSK/05} - X_{S-JTSK},$$

Na základě takto získaných hodnot bylo možno provést interpolaci korekcí dY, dX do pravidelné sítě. Vzhledem ke vzdálenosti bodů byl interval oka sítě zvolen 2 km

Tabulka s těmito hodnotami je součástí **software**.

2. Převod elipsoidických výšek na nadmořské

Pro převod **elipsoidických výšek** na **výšky nadmořské** (v systému Bpv) a naopak (transformace [6], resp. [6']), je použit gravimetrický kvazigeoid, rektifikovaný pomocí GPS/nivelace na 1024 bodech sítě výběrové údržby, které byly zanivelovány. Výsledkem je kvazigeoid **CR-2005-v1005.dat**.

Kvazigeoid je tabelován ve čtvercové síti 1' x 1.5' (cca 2 x 2 km). Včetně nutných přesahů za hranice republiky je to celkem 175 x 306 = 53550 uzlů. Ukázka souboru s hodnotami výšek kvazigeoidu, který je součástí software, je **v tabulce**:

- na prvním řádku je počet sloupců (306), počet řádků (175), krok v zeměpisné šířce (0.016..°) a krok v zeměpisné délce (0.025°)
- druhý řádek je nepodstatný a
- od třetího jsou data: B, L (ve stupních) v ETRF2000 a H_{kvaz} v metrech.

Tabulka – ukázka souboru kvazigeoidu „CR-2005-v1005.dat“

306	175	0.016667	0.025000
1	1	0.016667	0.025000
48.30000	11.70000		45.315
48.30000	11.72500		45.282
48.30000	11.75000		45.250
48.30000	11.77500		45.219
48.30000	11.80000		45.192
48.30000	11.82500		45.166
48.30000	11.85000		45.143
48.30000	11.87500		45.122
48.30000	11.90000		45.104
....			

3. Rovinné souřadnice

Rovinné souřadnice v modifikovaném Křovákově zobrazení byly získány z elipsoidických souřadnic v ETRF2000 aplikací postupu z odstavce 1. Pro tuto (a zpětnou) transformaci byl napsán výpočetní program.

4. Převod z S-JTSK/05 do S-JTSK

Vzhledem k nepravidelné deformaci bodového pole, vázaného na S-JTSK nelze vztah mezi S-JTSK/05 a S-JTSK realizovat jednoduchým matematickým výrazem. Proto bylo rozhodnuto využít pro vzájemný převod rozdíly souřadnic, tabelovaných v pravidelné síti. Velikost oka sítě byla empiricky zvolena 2 km. V níže uvedené **tabulce** (soubor **table_yx_3_v1005.dat**) jsou uvedeny hodnoty Y , X (Křovákovo zobrazení), dY , dX v metrech pro rohy sítě 2 x 2 km. Pro získání mezilehlých hodnot je doporučena **kvadratická interpolace**.

Tabulka – hodnoty rozdílů souřadnice v S-JTSK/05 a S-JTSK

428000	930000	0.346	0.279
430000	930000	0.346	0.279
432000	930000	0.346	0.279
434000	930000	0.157	0.158
436000	930000	0.166	0.139
438000	930000	0.172	0.142
440000	930000	0.169	0.145
442000	930000	0.146	0.161
444000	930000	0.135	0.171
446000	930000	0.139	0.172
448000	930000	0.156	0.148
450000	930000	0.187	0.129
452000	930000	0.199	0.117
454000	930000	0.201	0.118
456000	930000	0.204	0.118
458000	930000	0.204	0.124
460000	930000	0.214	0.119
462000	930000	0.221	0.122
464000	930000	0.221	0.124
466000	930000	0.226	0.124
468000	930000	0.227	0.125
470000	930000	0.235	0.128
472000	930000	0.292	0.185
474000	930000	0.283	0.191

atd.

5. Softwarová realizace

datové soubory (textové fily)

- CR-2005_v1005.dat – výšky kvazigeoidu CR 2005
- table_yx_3_v1005.dat – hodnoty rozdílů S-JTSK/05 vs. S-JTSK v rastru 2 x 2 km

software

- ETRF00-JTSK_v1005.for – zdrojový kód v jazyce FORTRAN pro převod souřadnic mezi ETRF2000 a rovinnými souřadnicemi v S-JTSK/05 a výškou v Bpv a dále mezi ETRF2000 a rovinnými souřadnicemi v S-JTSK a výškou v Bpv.

Program ETRF00-JTSK_v1005 – vzor vstupních dat pro transformaci z ETRF2000 do S-JTSK/05 nebo S-JTSK

01100080	50	57	8.39357	14	34	51.15474	460.095
01102010	50	59	49.33860	14	33	5.53121	471.606
01102020	51	0	6.52244	14	34	1.20697	425.458

atd.

Program ETRF00-JTSK_v1005 – vzor výstupu pro transformaci z ETRF2000 do S-JTSK

Transformace ETRF2000 --> S-JTSKxxx (Program etrf00-jtsk.for)										
Bod	B(ETRF)			L(ETRF)			H(el)	Y(S-JTSK)	X(S-JTSK)	H(niv)
01100080	50	57	8.3936	14	34	51.1547	460.10	718583.293	949224.484	416.88
01140020	51	2	2.3081	14	30	8.5076	415.18	722822.534	939481.936	371.88
01150030	51	0	37.4197	14	25	41.4885	451.56	728334.775	941375.016	408.15
01150130	50	59	20.2589	14	30	10.4292	473.30	723462.331	944448.962	429.97
01150230	50	57	8.2607	14	27	29.9745	517.60	727116.880	948066.412	474.23
01150260	50	57	17.9017	14	31	5.1831	454.83	722914.499	948339.855	411.51
01190030	51	2	20.6264	14	19	21.1000	473.20	735242.219	937201.014	429.70
01190110	51	1	24.9072	14	22	12.3459	455.81	732173.071	939364.603	412.32

atd.

Program ETRF00-JTSK_v1005 – vzor vstupních dat pro transformaci z S-JTSK do ETRF2000

01100080	718583.257	949224.314	416.88
01102010	719957.279	944018.734	428.37
01102020	718810.027	943638.439	382.21

atd.

Program ETRF00-JTSK_v1005 – vzor výstupu pro transformaci z S-JTSK do ETRF2000

Transformace S-JTSK/05 nebo S-JTSK --> ETRF2000 (Program etrf00-jtsk.for)												
Bod	Y(S-JTSKxxx)			X(S-JTSKxxx)			H(niv)	B(ETRF)			L(ETRF)	H(el)
01100080	718583.293	949224.484	416.88	50	57	8.3936	14	34	51.1548	460.10		
01140020	722822.534	939481.936	371.88	51	2	2.3081	14	30	8.5076	415.18		
01150030	728334.775	941375.016	408.15	51	0	37.4197	14	25	41.4885	451.56		
01150130	723462.331	944448.962	429.97	50	59	20.2589	14	30	10.4293	473.30		
01150230	727116.880	948066.412	474.23	50	57	8.2608	14	27	29.9745	517.60		
01150260	722914.499	948339.855	411.51	50	57	17.9017	14	31	5.1831	454.82		

atd.

Reference

[1] Kostecký J., Cimbálník M., Čepeck A., Filler V., Kostecký J. jr, Nágl J., Pešek I.: *Realizace S-JTSK/05*, Technická zpráva VÚGTK, v.v.i. č. 1147/2009. Zdíby 2009.

[2] Kostecký J., Cimbálník M., Čepeck A., Douša J., Filler V., Kostecký J. jr, Nágl J., Pešek I.: *Realizace S-JTSK/05 – varianta 2*, Technická zpráva VÚGTK, v.v.i. č. 1153/2010. Zdíby 2010.